

TD 26 : Développement limités Indications

Calculs de DL

1 ★★ Déterminer les développements limités suivants :

- | | |
|--|---|
| (a) $DL_5(0)$ de $\operatorname{sh} x$ | (m) $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+x+x^2}$ |
| (b) $DL_7(0)$ de $\operatorname{ch} x$ | (n) $DL_3(0)$ de $\operatorname{th} x$ |
| (c) $DL_5(0)$ de $\sqrt[3]{1+x} + \frac{1}{1+x}$ | (o) $DL_4(0)$ de $\frac{x \cos x}{\sin x}$ |
| (d) $DL_4(0)$ de $\frac{\sin x}{x}$ | (p) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$ |
| (e) $DL_2(0)$ de $\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ | (q) $DL_5(0)$ de $\arctan x$ |
| (f) $DL_3(0)$ de $\cos(x) \ln(1+x)$ | (r) $DL_5(0)$ de $\arccos x$ |
| (g) $DL_6(0)$ de $(1 - \operatorname{ch}(x)) \sin x$ | (s) $DL_5(0)$ de $\int_0^x e^{t^2} dt$ |
| (h) $DL_3(0)$ de $e^x \arctan x$ | (t) $DL_4(0)$ de $\sqrt{2+x}$ |
| (i) $DL_3(0)$ de $e^{\sqrt{1+x}}$ | (u) $DL_3(0)$ de $e^{\operatorname{ch} x}$ |
| (j) $DL_8(0)$ de e^{x^2} | (v) $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sqrt{1+x})$ |
| (k) $DL_4(0)$ de $\ln(\cos x)$ | (w) $DL_4(0)$ de $\operatorname{sh}(x-x^2)$ |
| (l) $DL_8(0)$ de $\sqrt{1+x^2} \ln(1+x^3)$ | (x) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ |
| | (y) $DL_4(0)$ de $\cos(x)^{\sin(x)}$ |
| | (z) $DL_5(0)$ de $\cos^5 x$ |

2 ★★ (DL ailleurs qu'en 0) En posant $h = x - 4$, déterminer les $DL_3(4)$ de e^x , $\ln x$ et x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De manière similaire, déterminer le $DL_3(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$ et le $DL_3(\pi/4)$ de $\tan x$.

Se ramener à chaque fois à un DL usuel en 0, quitte à faire des réécritures ou à poser X égal à une expression qui dépend de h .

3 ★★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α , l'ordre maximal n pour lequel x^α admet un $DL_n(0)$.

Prendre des valeurs simples de α pour trouver le n correspondant. Le $DL_n(0)$ sera par ailleurs assez simple...

4 ★★★ Montrer que $\frac{1}{1+|x|^3}$ admet un $DL_2(0)$. En est-il de même pour un $DL_3(0)$?

Si on pose $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$, on peut facilement calculer les DL en 0 de $f|_{\mathbb{R}_+}$ et $f|_{\mathbb{R}_-}$.

5 ★★★ Déterminer le $DL_{100}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Utiliser le $DL_{100}(0)$ de e^x .

Applications des DL

6 ★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

- Donner un équivalent simple de f en 0. En déduire le signe de f au voisinage de 0 et la pente de sa tangente.
- Donner un équivalent simple de f en 1.
- Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique et préciser leurs positions relatives.

7 ★★ À l'aide d'un DL et/ou d'un équivalent, déterminer les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x \ln x}$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\operatorname{sh} x} - \frac{e^{-x}}{\sin x}\right)$ | 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2} - x\right)$ |
| | 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$ |

8 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le $DL_n(0)$ de la fonction arcsinus. En déduire les valeurs des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ en 0 de la fonction arcsin.

Utiliser Taylor-Young

9 ★★ Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

- 1) Déterminer le $DL_2(0)$ de f .
- 2) En déduire que f peut être prolongée par continuité en 0. On notera encore ce prolongement f .
- 3) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- 4) Déterminer la position relative de f par rapport à sa tangente en 0.

Ni $\frac{1}{\ln(1+x)}$, ni $\frac{1}{x}$ n'admettent des DL en 0. Il faut donc faire une réécriture pour pouvoir calculer le DL de $f(x)$...

10 ★★ Donner la tangente et la position par rapport à la tangente aux points x_0 des fonctions suivantes. Est-ce qu'il y a un extremum local en x_0 ?

- 1) $\frac{1}{1+e^x} + \frac{x}{4}$ en $x_0 = 0$
- 2) $\frac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0 = 0$
- 3) $\frac{\ln x}{x-1} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ en $x_0 = 1$
- 4) $x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$ en $x_0 = 1$

11 ★★★★★ (Oral polytechnique) Soit $p \geq 2$ un entier. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^{p/n} + 2^{p/n} + \dots + p^{p/n}}{p} \right)^n$.

Passer à la forme exponentielle. Remarquer que pour connaître la limite de e^{u_n} , il suffit de connaître la limite de u_n . Pour cela, chercher un équivalent de u_n ...

— DA, asymptotes obliques, cadre implicite —

12 ★★ Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}} \quad g(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$h(x) = \ln(e^x - 1) \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{x^4}{1+x^2}}$$

13 ★★★ Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$\text{par : } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer le $DL_3(0)$ de f .
- 2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.

Pour la question 2), réécrire $f(x)$ différemment en utilisant le fait que $e^{(n+1)x} = (e^x)^{n+1}$

14 ★★ Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ des expressions suivantes à la précision indiquée :

- 1) $\sqrt{n} \ln(n+1)$ à la précision $n^{-5/2}$
- 2) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ à la précision $1/x$

15 ★★ Déterminer un développement asymptotique en 0 des expressions suivantes à la précision indiquée :

- 1) x^x à la précision $(x \ln x)^2$.
- 2) $\ln(\sin x)$ à la précision x^4 .

16 ★★★★★ (DL d'une fonction réciproque) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^{x^2}$.

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- 2) Justifier que f^{-1} admet un $DL_5(0)$ et que ce DL peut s'écrire

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5)$$

- 3) En déduire une expression du $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c . Conclure.

17 ★★★★★ (DA d'une suite implicite) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution qu'on notera u_n . On dispose donc d'une relation "fondamentale" :

$$u_n = n - \ln u_n$$

- 2) Montrer que (u_n) est croissante, puis montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.
- 3) Montrer que $\ln u_n = o(u_n)$. En déduire que $u_n \sim n$.
- 4) Justifier que $u_n = n + o(n)$.
- 5) En déduire que $u_n = n - \ln n + o(\ln n)$. *Utiliser la relation fondamentale.*
- 6) En déduire que $u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. *Utiliser la relation fondamentale.*
- 7) En déduire un DA de u_n avec 4 termes. *Utiliser la relation fondamentale.*

- 1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est bijective.
- 2) Utiliser le fait que $u_n = f^{-1}(n)$
- 3) Noter que $\ln x = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$ par croissances comparées.
- 4) C'est un résultat du cours, qu'on demande de redémontrer. Poser $\varepsilon_n = u_n - n$ et montrer que $\varepsilon_n = o(n)$.
- 5) Injecter $u_n = n + o(n)$ dans la relation fondamentale, mais pas partout ! Il faut l'injecter au bon endroit !
- 6) Idem
- 7) Idem

18 ★★★ (DL d'une fonction implicite) Pour $\varepsilon > 0$, on considère l'équation $e^{-\varepsilon x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution qu'on notera $x(\varepsilon)$. On dispose donc d'une relation "fondamentale" :

$$x(\varepsilon) = e^{-\varepsilon x(\varepsilon)}$$

- 2) Montrer que $x(\varepsilon) \leq 1$. En déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = 1$.
- 3) Montrer que $x(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$.
- 4) En déduire le $DL_2(0)$ de $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon)$
Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.
- 5) En déduire le $DL_3(0)$ de $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon)$
Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.